

Correction des exercices

Correction de l'exercice 3.1

- 1) • L'affirmation « *la moitié d'entre elles meurent à la fin de la première année de vie et parmi celles qui survivent, les 2/3 meurent à la fin de la deuxième année de vie* » se traduit par :

$$y_{n+1} = 0.5x_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{1}{3}y_n.$$

- L'affirmation « *dans leur troisième année de vie, chaque femelle donne naissance en moyenne à 6 individus femelles de la même espèce* » se traduit par :

$$x_{n+1} = 6z_n.$$

L'évolution de cette population est décrite par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 6z_n \\ y_{n+1} &= 0.5x_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3}y_n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

donc

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) D'après le cours, on a : $X_n = L^n X_0$.

3)

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $L^3 = I_3$, on a $X_3 = L^3 X_0 = X_0$. Cela signifie qu'au bout de trois ans, on est revenu au point de départ. L'effectif de la population et sa répartition se répètent donc avec un cycle de trois ans.

Correction de l'exercice 3.2

- 1) Il y a trois classes d'âge donc la matrice de Leslie est une matrice carrée d'ordre 3. Un raisonnement similaire à celui de l'exercice précédent permet de trouver que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ le vecteur des effectifs l'année 2019 + n . Pour $n = 0$, on a les effectifs initiaux :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

- Effectifs après un an :

$$X_1 = LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 555 \\ 20 \\ 19.5 \end{pmatrix}.$$

- Effectifs après deux ans :

$$X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 555 \\ 20 \\ 19.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275.5 \\ 222 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3.3

- 1) Il y a trois états donc la matrice de transition P est une matrice carrée d'ordre 3. Pour tous $i, i \in \{1, 2, 3\}$, p_{ij} représente la probabilité de passage de l'état j à l'état i . Les données de l'énoncé permettent de dire :

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

où les éléments marqués $*$ ne sont pas directement indiqués par l'énoncé. On complète les données manquantes en remarquant la somme de chaque colonne d'une matrice de transition vaut 1. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

- 2) On a $\pi^{(0)} = (0, 0.6, 0.4)^T$ et

$$\pi^{(2)} = P^2 \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.39 & 0.41 \\ 0.3 & 0.31 & 0.29 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.398 \\ 0.302 \\ 0.300 \end{pmatrix}.$$

Comme un temps beau correspond à l'état 1, la valeur cherchée est la première composante de $\pi^{(2)}$. Ainsi, il y a 39.8% de chances que le temps soit beau dans 2 jours.

Correction de l'exercice 3.4

- 1) • Il y a deux états donc la matrice de transition P est une matrice carrée d'ordre 2. Pour tous $i, i \in \{1, 2\}$, p_{ij} représente la probabilité de passage de l'état j à l'état i . On a :

$$P = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.08 \\ 0.15 & 0.92 \end{pmatrix}$$

car 85% restent dans l'état 1 ($p_{11} = 0.85$), 15% passent de l'état 1 à l'état 2 ($p_{21} = 0.15$), 8% passent de l'état 2 à l'état 1 ($p_{12} = 0.08$) et 92% restent dans l'état 2 ($p_{22} = 0.92$).

- La répartition initiale :

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1\,400\,000}{2\,000\,000} \\ \frac{600\,000}{2\,000\,000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

2)

$$\pi^{(3)} = P^3 \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.645565 & 0.189032 \\ 0.354435 & 0.810968 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5086051 \\ 0.4913949 \end{pmatrix}.$$